⋆

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^3+4t)\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_{-3}^4 \mathrm{e}^{5u}\,\mathrm{d}u$

c) $\displaystyle\int_2^0 \frac{1}{3+2x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{3t}}{6+\mathrm{e}^{3t}}$

e) $\displaystyle\int_{-1}^0 5u\,\mathrm{e}^{u^2+2}\,\mathrm{d}u$

f) $\displaystyle\int_{-2}^3 \cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$

⋆

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x|\times(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{8x+4}{(x^2+x)^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(u+1)^3}\,\mathrm{d}u$

d) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{3\,\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos t(\sin t)^4\,\mathrm{d}t$

f) $\displaystyle\int_0^1 (6x^2-4x-3)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Pour la dernière intégrale, on pourra chercher une primitive de la fonction à intégrer sous la forme $F(x)=(ax+b)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

⋆

Exercice 3

On considère les intégrales $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$.

1) Calculer $I+J$ et $I-J$
2) En déduire les valeurs de I et J

⋆

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+2}$.

1) Déterminer a et b tels que $f(x)=a\,\mathrm{e}^x+\dfrac{b\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}$ pour tout réel x.
2) En déduire $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$

⋆

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. On ne cherchera pas à calculer u_n.

1) Montrer que (u_n) est croissante
2) Démontrer que pour tout réel $x\geq 0$, on a : $-x^2\leq -2x+1$, puis $\mathrm{e}^{-x^2}\leq \mathrm{e}^{-2x+1}$
3) En déduire que pour tout entier naturel n on a $u_n\leq \dfrac{\mathrm{e}}{2}$
4) Démontrer que la suite u_n est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

⋆

Exercice 6

Soit I_n définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1) Sans chercher à calculer I_n , montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n=0$
2) Calculer I_n+I_{n+1}
3) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

⋆

Exercice 7

Soient f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x}$, et la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$. On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1) Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x}$ sur $[0;+\infty[$ et en déduire son signe.
2) Montrer que la suite (I_n) est croissante
3) On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $\mathrm{e}^x - x \geq \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leq \displaystyle\int_0^n 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   b) Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ telle que $H(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n \leq 2$
4) Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

⋆ ⋆

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x\right)$$

Indication : considérer le signe de $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,\mathrm{d}x$ *en fonction de* λ.

⋆ ⋆

Exercice 9

Calculer la dérivée de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^4} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Indication : on pourra considérer une primitive F *de* $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ *sans chercher de formule explicite pour cette fonction.*

⋆ ⋆

Exercice 10

(Inégalité de Young) Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

1) Pour tout $x > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$
2) En déduire que $\forall a, b > 0$, $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \geq ab$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 11

(D'après Oraux ENS 2019) Pour tout $x \in [0,1]$, on définit la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante. On définit la fonction $f_0 : x \in [0,1] \longmapsto 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

1) Déterminer les fonctions f_1 et f_2
2) Soit $x \in [0,1]$ fixé. Étudier le sens de variation de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$, $1 + x \leq f_n(x) \leq \mathrm{e}^x$.
4) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on notera $f(x)$.
5) Montrer que $\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \mathrm{e}\,|x - y|$
6) En déduire que la fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $[0,1]$.

Intégration par partie

⋆
Exercice 12

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^3 \ln x\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x$ d) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} (x^2+3x)\,\mathrm{e}^x$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

⋆ ⋆
Exercice 13

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2$ c) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(u)\,\mathrm{d}u$

⋆ ⋆
Exercice 14

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $I_n=\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

1) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I_n=u_n+\dfrac{1}{n}J_n$ où u_n est une suite qui tend vers 0 et $J_n=\displaystyle\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$
2) Montrer que la suite (J_n) est bornée.
3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

⋆
Exercice 15

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 u^n\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$
2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3) Trouver un équivalent simple de I_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

⋆
Exercice 16

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a)=f(b)=0$. Soit $M=\sup_{t\in[a,b]}|f'(t)|$, c'est à dire un réel tel que $\forall t\in[a,b]$, $|f'(t)|\leq M$.

1) Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\dfrac{(b-a)^2}{4}M$
2) Déterminer dans quel(s) cas l'égalité précédente est une égalité.

Changement de variables

⋆
Exercice 17

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t\ln(t^2+1)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t,\quad u=t^2+1$ 3) $\displaystyle\int_{1/8}^{1/3} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t}},\quad u=\frac{1}{t}$

2) $\displaystyle\int_1^8 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}+t},\quad u=\sqrt[3]{t}=t^{1/3}$ 4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}},\quad u=\mathrm{e}^t$

⋆ ⋆
Exercice 18

Soit $T > 0$ un réel et soit f une fonction périodique de période T sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

⋆
Exercice 19

1) À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, démontrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}$$

2) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)} = \frac{\pi}{4}$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+x}$
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $x = \sin(t)$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$, appelée **intégrale de Wallis**.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

1) Calculer W_0 et W_1.
2) Montrer que (W_n) converge.
3) En posant $t = \frac{\pi}{2} - x$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$
4) En déduire W_2.
5) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
6) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
7) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
8) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Sommes de Riemann

⋆
Exercice 21

1) À l'aide du changement de variable $\sin(t) = x$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t$
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$

⋆
Exercice 22

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$
2) En déduire, à l'aide d'une somme de Riemann, la limite de (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$